数理解析研究所講究録
1080 巻 1999 年 122-128

Djokovic の不等式と等号成立条件

九州工大・情報工　本田あおい
山形大・工　高橋眞映

Hlawka の不等式 (cf. [3]) の一つの一般化である Djokovic の不等式 (cf. [1]) とその等号成立条件について考察し、そこから別のタイプの不等式及びその等号成立条件を導くことが本稿の主な目的である。またある種の weight version についても考察する。

今 Hilbert 空間 H を固定しよう。このとき次の不等式が成立する：

$$\|x\|+\|y\|+\|z\|+\|x+y+z\| \geq \|x+y\|+\|y+z\|+\|z+x\| \qquad (x, y, z \in H).$$

これは Hlawka の不等式と呼ばれ、一つの基本的な不等式と考えられる。D. Z. Djokovic はこの不等式を次のように拡張した：

$$\binom{n-2}{k-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|+\binom{n-2}{k-2}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\| \geq \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\|$$

$$(2 \leq k \leq n-1,\ x_1,\cdots,x_n \in H;\ n=1,2,\ldots).$$

勿論 $n=3, k=2$ のときが Hlawka となることは自明であろう。また n 及び $x_1,\cdots,x_n \in H$ を固定したとき、Djokovic の不等式の等号が成立するためには次の 5 条件のうちの一つが成立することが必要十分であることが示された：

(i) $\#\{i : x_i \neq 0\} = 2$.

(ii) $\#\{i : x_i \neq 0\} = 3$ and $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

(iii) $k = n-1$ and $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

(iv) $x_1,\cdots,x_n$ are codirectional, i.e., $\exists y \in H, \exists \alpha_1,\cdots,\alpha_n \geq 0 : x_i = \alpha_i y \ (i=1,\cdots,n)$.

(v) $x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots, x_n$ are codirectional for some $i=1,\cdots,n,$ and $x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i$ are codirectional.

実はこれらの結果は、D. H. Similey and M. F. Smiley [4] によっても独立に証明されている。

さて我々の一つの興味は、n と k だけに依存するある正数 A, B, C に対して、次のような形の非自明な不等式が得られないかと言うことである：

$$A\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|+B\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\| \geq C\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|.$$

このとき注意しなければならないのは、常に $\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$ が成り立っているのであるから、上の不等式が意味をもつためには、$A<C$ でなければならない。この問題について考察しよう。先ず $n\,(n\geq 3)$ 及び $x_1,\cdots,x_n\in H$ を固定し、$1\leq k\leq n-2$ なる k を考える。このとき

(1) $$\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} x_i-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})\right|\geq\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$$

が成り立つから、両辺 $\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}$ をとると、簡単な考察から

(2) $$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right|+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-k}\leq n}\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-k}}\right|\geq\binom{n}{k}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$$

を得る。一方 Djokovic の不等式において、k の代りに、$n-k$ を考えると（これは、$1\leq k\leq n-2$ であるから、$2\leq n-k\leq n-1$ となり可能）、

(3) $$\binom{n-2}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|+\binom{n-2}{n-k-2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\geq\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-k}\leq n}\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-k}}\right|$$

が成り立つ。このとき、上の二つの不等式 (2), (3) から、簡単な計算により、

(4) $$\binom{n-2}{k}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|+\frac{n-k-1}{k}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right|\geq\frac{2n-k-1}{n-k}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$$

を得る。勿論

$$\binom{n-2}{k}<\frac{2n-k-1}{n-k}$$

が成り立つ k は沢山あるから、上で注意したように、この不等式は意味がある。例えば、$k=n-2$ とすると、我々の不等式 (4) は次の不等式を導く：

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|+\frac{1}{n-2}\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\left|x_1+\cdots+\hat{x}_{i_1}+\cdots+\hat{x}_{i_2}+\cdots+x_n\right|\geq\frac{n+1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|.$$

さて不等式 (4) の等号が成立するためには、容易な考察から、不等式 (2), (3) の等号が同時に成立することである。また不等式 (2) の等号が成り立つための必要十分条件は、不等式 (1) の等号が、$1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ を満たす全ての組 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ について成り立つこと、つまり

(vi) $\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} x_i-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$ for all couples $\{i_1,\cdots,i_k\}$ such that $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$

である。従って、不等式 (4) の等号が成立するためには、次の 5 条件のどれかが成り立つことである：

$$\text{(i)}\wedge\text{(vi)},\ \text{(ii)}\wedge\text{(vi)},\ \text{(iii)'}\wedge\text{(vi)},\ \text{(iv)}\wedge\text{(vi)},\ \text{(v)}\wedge\text{(vi)}.$$

但し 条件 (iii)' は (iii) で k の代りに、$n-k$ と置いた条件：$k=1$ and $\sum_{i=1}^{n} x_i=0$ である。容易な観察から、(i) $\wedge$ (vi) と (ii) $\wedge$ (vi) は起こりえないと言うことが分かる。また (iii)' $\wedge$ (vi) は $k=1$ and $x_1=\cdots=x_n=0$ と同値である。また条件 (iv) は条件 (vi) を

容易に導く。最後に条件 (v) ∧ (vi) と条件：

$$\text{(vii)}\ \begin{cases} x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,\ x_n \text{ are codirectional for some } i=1,\cdots,n, \\ \exists z\,(\neq 0)\in H, \exists\beta_1\geq 0, \exists\beta_2\geq 0: \sum_{i=1}^{n} x_i=\beta_1 z\,, x_i=\beta_2 z\,, \beta_1\geq\beta_2 \end{cases}$$

は同値であることを見る。先ず、(v) ∧ (vi) を仮定しよう。(v) より、

$$\begin{cases} \exists y\,(\neq 0)\in H, \exists\alpha_j\geq 0: x_j=\alpha_j y\ \ (j=1,\cdots,\hat{i},\cdots,n)\ \ \textit{for some}\ \ i=1,\cdots,n\,, \\ \exists z\,(\neq 0)\in H, \exists\beta_1\geq 0, \exists\beta_2\geq 0: \sum_{i=1}^{n} x_i=\beta_1 z\,, x_i=\beta_2 z \end{cases}$$

が成り立つ。従って、$(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)y=(\beta_1-\beta_2)z$ である。ここで勿論 $\beta_1\neq\beta_2$ と仮定してよいから、$y=\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n}z$ となる。今 $i\notin\{i_1,\cdots,i_k\}$ となるように、$i_1,\cdots,i_k$ を選ぶ。このとき、$\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}\neq 0$ となるようにできる。もし出来なかったら、$x_j=0\ (j=1,\cdots,\hat{i},\cdots,n)$ となり、$\beta_1=\beta_2$ となるからである。そこで、これらを条件 (iv) の式に代入して、

$$\frac{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n}\left|\beta_1-\beta_2\right|\left\|z\right\|+\left|\beta_1-\frac{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}}{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n}(\beta_1-\beta_2)\right|\left\|z\right\|=\beta_1\left\|z\right\|$$

を得る。従って、両辺に $\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n$ を乗じて、

$$(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\left|\beta_1-\beta_2\right|+\left|\{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n-(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\}\beta_1+(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\beta_2\right|$$
$$=\beta_1(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)$$

となるが、$i\notin\{i_1,\cdots,i_k\}$ から $\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n\geq\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}$ であるので、上式は

$$(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\left|\beta_1-\beta_2\right|=(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})(\beta_1-\beta_2)$$

となり、$\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k}\neq 0$ に注意して、$\beta_1>\beta_2$ を得る。つまり、(vii) が示された。

逆に (vii) を仮定しよう。従って (v) は自明である。また仮定から

$$\begin{cases} \exists y\,(\neq 0)\in H, \exists\alpha_j\geq 0: x_j=\alpha_j y\ \ (j=1,\cdots,\hat{i},\cdots,n)\ \text{for some}\ \ i=1,\cdots,n\,, \\ \exists z\,(\neq 0)\in H, \exists\beta_1\geq 0, \exists\beta_2\geq 0: \sum_{i=1}^{n} x_i=\beta_1 z\,, x_i=\beta_2 z\,,\ \beta_1\geq\beta_2\geq 0 \end{cases}$$

である。今 $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ なる任意の組 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ を考え、(vi) の等式を示そう。先ず仮定から $(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)y=(\beta_1-\beta_2)z$ である。また $\beta_1\neq\beta_2$ と仮定してよい。もしそうでなかったら、$x_1+\cdots+\hat{x}_i+\cdots+x_n=0$ であるから、

$\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n=0$, 従って、$x_j=0$ $(j=1,\cdots,\hat{i},\cdots,n)$ となり、(vi) の等式は自明だからである。さて $i\notin\{i_1,\cdots,i_k\}$ の場合を考えよう。このときは、

$$\begin{aligned}
&\left|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}x_i-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})\right| \\
&=(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\|y\|+\left\|\{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n-(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})\}y+\beta_2 z\right\| \\
&=\{(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})+(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)-(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_k})+\frac{\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n}{\beta_1-\beta_2}\beta_2\}\|y\| \\
&=(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right)\|y\| \\
&=\beta_1\|z\| \\
&=\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|
\end{aligned}$$

となり、(vi) の等式が成り立つ。次にそうでない場合を考えよう。例えば $i=i_1$ の場合を考える。このときは、$\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n\geq\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}$ 且つ

$$\begin{aligned}
&\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}+\frac{\beta_2(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)}{\beta_1-\beta_2} \\
&=\frac{1}{\beta_1-\beta_2}\left(\beta_1(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k})+\beta_2\{(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)-(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k})\}\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\left\|x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i-(x_{i_1}+\cdots+x_{i_k})\right\| \\
&=\left\|(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k})y+x_i\right\|+\left\|(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)y-(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k})y\right\| \\
&=\left(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}+\frac{\beta_2(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)}{\beta_1-\beta_2}\right)\|y\|+ \\
&\qquad\qquad\left((\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)-(\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k})\right)\|y\| \\
&=\left(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n+\frac{\beta_2(\alpha_1+\cdots+\hat{\alpha}_i+\cdots+\alpha_n)}{\beta_1-\beta_2}\right)\|y\|
\end{aligned}$$

$$= \frac{\beta_1(\alpha_1 + \cdots + \hat{\alpha}_i + \cdots + \alpha_n)}{\beta_1 - \beta_2}\|y\|$$
$$= \beta_1\|z\|$$
$$= \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|$$

となり、(vi) の等式が成り立つ。勿論他の場合も同様である。

以上を纏めると、我々は次の定理を得る。

Theorem 1. Let H be a Hilbert space and let $x_1,\cdots,x_n \in H$ $(n \geq 3)$ and $1 \leq k \leq n-2$. Then

$$\binom{n-2}{k}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| + \frac{n-k-1}{k}\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}\|x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\| \geq \frac{2n-k-1}{n-k}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|.$$

Equality holds in the above inequality if and only if one of the following conditions holds :

(a) $k=1$ and $x_1 = \cdots = x_n = 0$,

(b) $x_1,\cdots,x_n$ are codirectional,

(c) $\begin{cases} x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n \text{ are codirectional for some } i = 1,\cdots,n, \\ \exists z\,(\neq 0) \in H, \exists \beta_1 \geq 0, \exists \beta_2 \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} x_i = \beta_1 z,\ x_i = \beta_2 z,\ \beta_1 \geq \beta_2. \end{cases}$

Here the sign ^ placed over a vector indicates that this vector is to be deleted from the sequence.

Corollary 2. Let $x_1,\cdots,x_n \in H$ $(n \geq 3)$. Then

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| + \frac{1}{n-2}\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}\|x_1 + \cdots + \hat{x}_{i_1} + \cdots + \hat{x}_{i_2} + \cdots + x_n\| \geq \frac{n+1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|.$$

Equality holds in the above inequality if and only if one of the conditions (b) and (c) in Theorem 1 holds.

次に我々は Djokovic の不等式の weight version を考えたい。然しながらこれはなかなか困難を極める。そこで比較的考えやすい $k=n-1$ の場合を考察する。この場合の不等式は

(5)
$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| + (n-2)\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \geq \sum_{i=1}^{n}\|x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n\|$$

である。今 weights : $\mu_1 \geq 1, \cdots, \mu_n \geq 1$ を考える。このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\left\| x_1 + \cdots + x_n \right\| - \left\| x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n \right\| + \left\| x_i \right\| \right)$$

$$\text{(6)} \qquad \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\left\| x_1 + \cdots + x_n \right\| - \left\| x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n \right\| + \left\| x_i \right\| \right)$$

$$\geq 2 \left\| x_1 + \cdots + x_n \right\| \text{ (by the Djokovic inequality)}$$

であるから、次の結果を持つ：

Theorem 3. Let H be a Hilbert space and let $x_1, \cdots, x_n \in H$ $(n \geq 3)$ and $\mu_1 \geq 1, \cdots, \mu_n \geq 1$. Then

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\| x_i \right\| + \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i - 2\right) \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\| x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n \right\|.$$

更に等号成立条件に関しては、もし等号が成り立てば、(6) 式から

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left\| x_1 + \cdots + x_n \right\| - \left\| x_1 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_n \right\| + \left\| x_i \right\| \right) = 2 \left\| x_1 + \cdots + x_n \right\|$$

であるから、(5) 式の等号が成り立つことに注意を留めるだけにしよう。

所で、 Hlawka 不等式の成り立つノルム空間を Hlawka 空間と呼ぶことにしよう。D. H. Similey and M. F. Smiley は Hlawka 空間においては常に Djokovic の不等式が成立することを述べている。従って我々の不等式も Hlawka 空間においては常に成り立つ事に注意したい。然しながら Hlawka 空間自体を決定することは非常に難しい。例えば $\ell^p(\Omega)$ を考えた場合、この空間は $1 \leq p \leq 2$ なら常に Hlawka であるが、$p > \frac{\log 3}{\log 1.5}$, $\#\Omega \geq 3$ のときは Hlawka ではない (cf. [2], [4])。コンピュータで計算すると、どうも $p = \frac{\log 3}{\log 1.5}$ が境界らしいことが分かるが、数学的には全く分かっていないと思う。

謝辞：コンピュータで御世話になった山形大学工学部の新関久一助教授に感謝の意を表したい。

また本稿作成に当たって、貴重なご意見を頂いた岡山県立大学の高橋泰嗣教授と九州工大の岡崎悦明教授に感謝の意を表したい。

参考文献

1. Z. D. Djokovic, Generalizations of Hlawka's inequality, Glasnik Mat.-Fiz. Astromon. Ser. II. Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske 18(1963), 169-175.
2. A. Honda, Y. Okazaki and Y. Takahashi, Generalization of the Hlawka's inequality, Bulletin of the Kyushu Institute of Thechnology Pure and Applied Mathematics, 45(1998).
3. H. Hornich, Eine Ungleochung fur Vektorlangen, Math. Z., 48(1942), 268-274.
4. D. M. Smiley and M. F. Smiley, The polynomial inequalities, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 755-760.